

# Little Kanunu, tek fazlı sıralama sistemleri ve değişkenlik

D. Brent Bandy ve Michael R. Godfrey Winconsin-Oshkosh Üniversitesi

SİSTEMDE YAPILAN  
DEĞİŞİKLİKLERİN  
İŞLETİM İLE İLGİLİ  
DEĞERLER ÜZERİNDEKİ  
ETKİLERİ

Çoğu işletim sisteminde varlıkların işleme alınmaları için sıralarını beklemeleri gereklidir. Üretim sistemlerinde varlıklar genellikle süreç içindeki işlerdir ve çoğu hizmet sisteminde de insanların beklemesi gerekir.

Bu tür sistemlerde göz önüne alınması gereken kritik konular, sistemi tanımlayan kilit parametreler ve sistem performansı ile ilgili işletimsel değerlerdir.

Bu makale, kilit parametrelerdeki değişikliklerin tek fazlı bir sistemde bu işletimsel değerleri nasıl etkilediği konusuna odaklanmaktadır. Sistemden geçen varlıklar ile ilgili kilit değerler envanter (sistemdeki ortalama varlık sayısı), sistemden ortalama geçiş hızı ve sistemdeki ortalama çevrim süresidir.

Bekleme için sınırlı sayıda yeri olan sistemlerde ise, dördüncü kilit değer sisteme girmesi engellenen ortalama varlık sayısıdır. Little Kanunu(1) sistemden geçen varlıklar ile ilgili üç değeri aşağıdaki denklem ile birbirine bağlar:

$$I = R \times T$$

Burada I ortalama envanter, R ortalama akış hızı ve T ortalama akış süresidir. Geriye kalan son değer (ortalama işçi kullanım değeri) analizde görececi olarak çok önemli bir role sahip değildir.

Little Kanunu çok çeşitli türde işletimsel sistemlerde uygulanabilir(2); buna yakın zamanda yayınlanan ve tek fazlı sıra beklemeli sistemler üzerine hazırlanmış bir çalışmada kullanılan çağrı merkezi sistemleri de dahildir(3). Ancak bu sistemde ele alınan bir seçeneği göz ardı edeceğiz: vazgeçilen çağrılar (uzun süre beklendiği için sonlandırılan çağrılar).

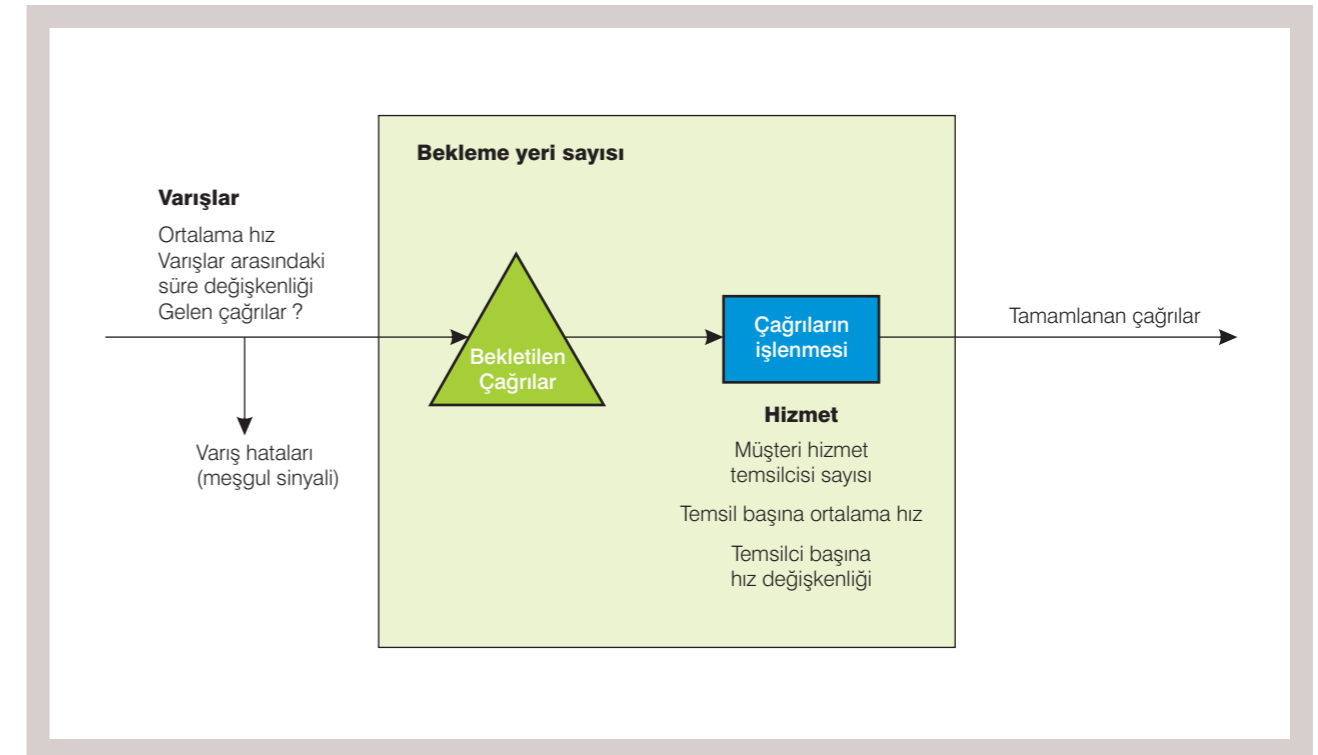
## Sıralama Sistemi

Burada ele alınan sistemde, çağrıları işleyen bir veya daha fazla müşteri hizmetleri temsilcisi ve sisteme giren çağrılar (tüm temsilciler başka çağrılar ile meşgul oldukları için bekletilen çağrılar olmaktadır) için kullanılan tek bir bekleme hattı bulunmaktadır.

Sistemin tanımı Şekil 1'de gösterilmiştir ve aşağıdakilerin belirtilmesi gereklidir:

- Temsilci sayısı.
- Bekleme yeri sayısı, yani toplam telefon hattı sayısından temsilci sayısının çıkarılması ile elde edilen değer.
- Varışların oluşum şekli; konumlar arasındaki varış sürelerinin olasılık dağılımı ile belirlenir.
- Hizmet sürelerinin olasılık dağılımı.

Şekil-1: Çağrı Merkezi Sistemi



Sisteme ait altı kilit parametre aşağıdaki gibidir:

1. Ortalama varış hızı.
2. Konumlar arasındaki varış süreleri için değişkenlik katsayısı.
3. Temsilci sayısı.
4. Temsilci başına ortalama hız.
5. Hizmet süreleri için değişkenlik katsayısı.
6. Bekletilen çağrılar için kullanılabilen hat (bekleme yeri) sayısı.

Sistem ile ilgili önemli bir genel değer ise kapasitenin kullanımıdır (varış hatası olmadığı kabul edilirse). Bu değer tüm varlıklar için ortalama varış hızının ortalama hizmet hızına oranı ile belirlenir. Ortalama hizmet hızı ise temsilci sayısı ve temsilci başına ortalama hıza bağlıdır.

Uygulamada, elbette düşük kapasite kullanımı ve göreceli olarak çok sayıda bekleme yeri olan sistemlerde varış hatası olmaz. Bu nedenle değişikliklerin sistem üzerindeki etkilerini göze alırken iki kategori kullanılacaktır: engelleme olmayan sistemler (varış hatası olmayan) ve engelleme olan sistemler.

Parametre değerleri birer birer arttırılır ve her işletimsel değer için tepkisi artış, azalma veya sabit kalma şeklinde olur. Bu yaklaşım oldukça pratiktir, çünkü sıralama sistemindeki bu parametre değerleri temsilci sayısı ve bekleme yeri sayısı (toplam telefon hattından temsilci sayısı çıkararak elde edilen değer ve hizmet süresi) gibi işletim ile ilgili faktörler tarafından belirlenir. Bu

Tablo-1: Engelleme olmayan sistemlerin tepkileri

Parametre değerindeki artış	Ortalama üzerindeki etki			
	Akış hızı	Akış süresi	Envanter	Temsilci başına kullanım
<b>Varışlar</b> • Ortalama hız • Konumlar arasındaki varış sürelerindeki değişiklikler	Artış Sabit	Artış Artış	Artış Artış	Artış Sabit
<b>Hizmet</b> • Sunucu sayısı • Sunucu başına ortalama hız • Sunucu başına hız değişkenliği	Sabit Sabit Sabit	Azalma Azalma Azalma	Azalma Azalma Artış	Azalma Azalma Sabit

parametre değerlerindeki değişiklikler, işletim ile ilgili değerlerde değişikliklere neden olabilir.

Sıralama sistemindeki dört kilit işletimsel değer aşağıdaki gibidir:

1. Sistemden ortalama akış hızı.
2. Sistemdeki ortalama akış süresi.
3. Sistemdeki ortalama envanter.
4. Ortalama temsilci kullanımı.

Engellemenin mümkün olduğu sistemlerde, beşinci kilit işletimsel değer ortalama hata oranıdır. Bu değer sistemden ortalama geçiş hızı ile aynı birimler ile ölçülmelidir. Daha önce de belirtildiği gibi Little Kanunu ilk üç değeri birbiri ile ilişkilendirir. Ayrıca sistemden ortalama geçiş hızı ve ortalama hata oranının toplamı, ortalama varış hızına eşittir.

### Engelleme Olmayan Sistemler

Tablo 1'de, engelleme olmayan sistemlerde ortalama akış hızı, akış süresi, envanter ve temsilci başına kullanım parametrelerindeki artışlara tepkiler gösterilmiştir. Engelleme olmayan sistemlerdeki ortalama sistem içindeki akış hızı, ortalama varış hızına eşittir.

Bu nedenle, ortalama akış hızı ortalama varış hızı ile birlikte artar ve diğer parametrelerdeki

gösterilmektedir.

Ortalama varış hızı arttıkça beş kilit performans değerinin ortalaması da artacaktır. Benzer, ancak ters yöndeki bir tepki ise bekleme yeri sayısı arttığı zaman görülür. Bekleme yeri sayısının artması, ortalama varış hatası oranını azaltır. Varış hatalarındaki bu azalma ortalama sistem içindeki akış hızında ve diğer üç değerde (ortalama akış süresi, ortalama envanter ve temsilci başına ortalama kullanım) artışa neden olur.

Önceki gibi, temelde sistemin tepkisi işçi sayısı ve işçi başına ortalama hızın arttığı durumlardaki ile aynıdır. Her ikisinde de ortalama akış süresi ve temsilci başına kullanım değerleri azalacak ve sistemde daha az tıkanıklık olacak, ortalama envanter azalma eğilimi gösterecektir.

İkinci bir etki de ortaya çıkacaktır: Tıkanıklığın azalması ile birlikte bekleme yerleri daha düşük sıklıkta doldurulacaktır ve ortalama varış hatası sayısı azalacak, sistem içinden ortalama akış hızı artacaktır. Bu ikinci etki ayrıca ortalama envanteri de arttıracaktır, ancak birinci etkinin yaptığı değişiklik daha belirgin olacaktır. Bu nedenle ortalama envanter için toplam etki azalma yönünde olacaktır.

Engelleme olan sistemlerdeki son iki durum, yine varış ve hizmet sürelerindeki değişkenliğin artması ile ilgilidir. Engelleme olmayan sistemlerde görüldüğü gibi birinci etki sistemdeki tıkanıklığın artması ve böylece hem akış süresinin,

Tablo-2: Engelleme olan sistemlerin tepkileri

Parametre değerindeki artış	Ortalama üzerindeki etki				
	Varış hataları	Akış hızı	Akış süresi	Envanter	Temsilci başına kullanım
<b>Varışlar</b> • Ortalama hız • Konumlar arasındaki varış sürelerindeki değişiklikler	Artış Artış	Artış Azalma	Artış Artış	Artış ?	Artış Azalma
<b>Hizmet</b> • Sunucu sayısı • Sunucu başına ortalama hız • Sunucu başına hız değişkenliği	Azalma Azalma Artış	Artış Artış Azalma	Azalma Azalma Artış	Azalma Azalma ?	Azalma Azalma Azalma
<b>Bekleme</b> • Bekleme yeri sayısı	Azalma	Artış	Artış	Artış	Artış

hem de ortalama envanterin artması olacaktır.

İkinci etki olarak tıkanıklığın artması ortalama varış hatası sayısında ve temsilci başına kullanım değerinde azalmaya neden olacaktır. Ayrıca ikinci etki ortalama envanter ve ortalama akış süresini azaltacaktır.

Ortalama akış süresi için ikinci etkinin yaptığı değişiklik birinci etkiden daha belirgindir, bu nedenle ortalama akış süresi artacaktır. Ancak, ortalama envanter konusunda hangi etkinin baskın olacağı net olarak bilinmemektedir, çünkü Little Kanunu'na göre akış süresinin artması ortalama envanteri arttıracak, akış hızının azalması ise envanteri azaltacaktır.

### Değişkenliğin Etkisi

Engelleme olan sistemlerde varışlar ve hizmet süresindeki değişkenliğin ortalama envanter üzerindeki etkisini araştırmak için, ProModel for Windows(5) yazılımını kullanarak sistemin simülasyon modelini oluşturduk.

Bekletilen çağrılar ve çağrıların işlenmesi için konumlar belirlendi. Müşteri çağrılarını temsil eden bir varlık tanımlandı ve konumlar arasındaki varış süreleri için lognormal dağılım kullanıldı. Ortalama süre 2,0 dakika ve standart sapma 2,0 dakika çarpı varış süresi değişkenlik katsayısı olarak alındı.

Hizmet süreleri için de lognormal dağılım kullanıldı. Ortalama süre 2,0 dakika çarpı sistemin kapasite kullanımı bölü temsilci sayısı olarak alındı. Standart sapma ise ortalama süre ile değişkenlik katsayısının çarpımı olarak alındı. Diğer olasılık dağılımları, örneğin Poisson, sıralama sistemlerinde yaygın olarak kullanılır.

Lognormal dağılımı iki nedenle kullanıyoruz:

1. Asla negatif değer vermez.
2. Değişkenlik katsayısı kolayca kontrol edilebilir.

Simülasyon modelini her çalıştırdığımızda önce 2.000 saatlik bir ısınma süreci, ardından istatistikleri topladıktan sonra 10.000 saatlik bir çalışma süreci uyguladık. Yani her çalıştırmanın sonucunda yaklaşık 300.000 çağrı işlenmiş oldu.

Konumlar arası varış ve hizmet süreleri için ortak rasgele sayı dizileri(6) kullanıldı. Her çalıştırmada varış hataları, sistemden ortalama akış hızı, ortalama akış süresi ve ortalama envanter için ortalama değerler hesaplandı.

Simülasyon modeli ilk başta tek bir temsilci ve tek bir bekleme yeri olan, sistem kapasite kullanımını 0,1 basamaklı artışlar ile 0,1 - 0,9 arasında değişen durumları araştırmak için kullanıldı.

Her kapasite kullanım seviyesi için hem konumlar arası varış süreleri, hem de hizmet süreleri için farklı değişkenlik katsayıları olan durumlar simüle edildi. Toplam 36 durum simüle edildi ve her iki değişkenlik katsayısı türü için 0,2 basamaklı artışlar ile 0,0 ve 1,0 arasındaki değişkenlik katsayıları kullanıldı.

Konumlar arası varış süreleri ve hizmet sürelerinde küçük değişkenlik katsayısı olan durumlarda, özellikle sistem kapasitesi az kullanıldığı zaman değişkenlik katsayıları arttıkça ortalama envanter değerleri de arttı.

Bu durum mantığa uygundu, çünkü bu tür durumlarda küçük varış hatası oranları olması, ortalama akış sürelerindeki artışın ortalama envanterdeki değişiklikler üzerindeki etkisinin, ortalama akış hızındaki azalmalardan daha fazla olduğu anlamına geliyordu.

0,5 kapasite kullanımı ve 1,0 hizmet değişkenlik katsayısı olduğunda, varış değişkenlik katsayısı 0,0'dan 0,8'e çıkarken ortalama envanter de arttı. Daha sonra varış değişkenlik katsayısı için 0,8'den 1,0'a artış ile birlikte ortalama envanter sonunda azaldı. Kapasite kullanımı arttıkça, artan varış değişkenlik katsayısı değerleri için ortalama envanterde azalmalar görüldü. Bu azalmalar hizmet değişkenlik katsayısı değerleri artarken de görüldüler.

Şekil 2'de varış değişkenlik katsayıları arttıkça ortaya çıkan sonuçlar, Şekil 3'te ise hizmet değişkenlik katsayıları arttıkça ortaya çıkan sonuçlar verilmiştir. Her iki şekilde de sol alta "artan envanter" notu düşülmüştür, çünkü her zaman 0,9 veya daha az kapasite kullanım değerlerindeki değişkenlik katsayıları için bu bölgedeki envanter artmaktadır. Kırmızı çizgiler, belirtilen kapasite kullanım değerlerinde envanterin azalmaya başladığı değeri gösteriyor.

Şekil 2 ve 3'ün varış ve hizmet değişkenlik katsayılarının (hata olmadığı kabul edilirse) bağımsız, ortalama envanterin ise bağımlı değişken olduğu aynı dört boyutlu yüzeyin iki farklı gösterimi olduğuna dikkat edin. Varış hataları olabileceği için ortalama kapasite kullanımı beklenen kapasite kullanımından az olabilir.

Şekil 2 ve 3'teki dış çizgiler, beklenen kapasite kullanımı değerleri içindir ve ortalama envanterin yatay ekseninde verilen değişken değerlerine göre türevinin sıfır olduğu değerleri gösterirler.

Tek temsilci ve tek bekleme yeri için analiz tamamlandıktan sonra simülasyona ikinci bekleme yeri eklendi ve 0,1 basamaklı artışlar ile 0,5 ve 0,9 arasında değişen kapasite kullanım değerleri için simülasyonlar çalıştırıldı. Şekil 4'te artan varış değişkenlik katsayıları için sonuçlar, Şekil 5'te ise artan hizmet değişkenlik katsayıları için sonuçlar verilmiştir.

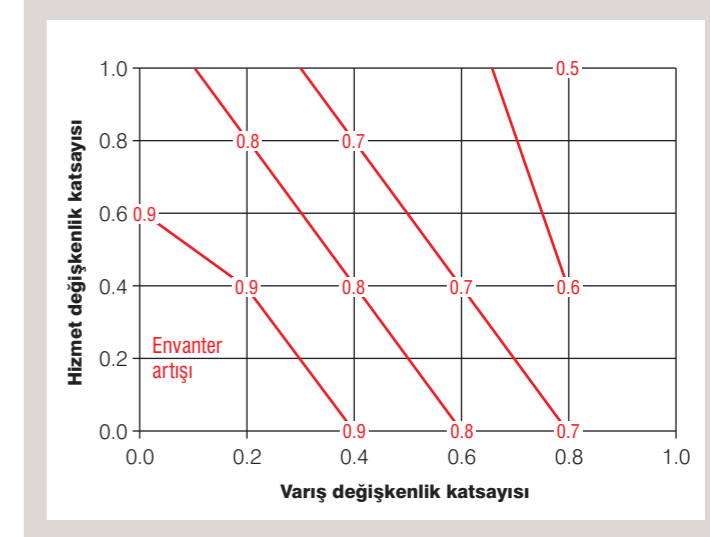
İkinci bekleme yeri eklendiği zaman sistemin çok daha az duyarlı olduğuna dikkat edin. Örneğin 0,8 ve üstü kapasite kullanım değerlerinde envanter artmaktadır. Ayrıca envanter azalmasının başladığı sınır, 0,9 kapasite kullanım değerinde çok daha sağdadır.

Daha sonra simülasyona ikinci temsilci eklendi ve tek bekleme yeri olan durumlar bu şekilde tekrar çalıştırıldı. Artan varış değişkenlik katsayıları için sonuçlar Şekil 6, artan hizmet değişkenlik katsayıları için sonuçlar ise Şekil 7'de gösterilmiştir.

Bu şekilleri Şekil 2 ve Şekil 3 ile karşılaştırdığımızda, tek bekleme yeri varken ikinci temsilci eklendiği zaman sistemin daha duyarlı olduğu görülmektedir.

Bu da Şekil 6 ve 7'de envanter azalma başlangıç sınırının verilen sistem kapasitesi değerleri için sola kaymasından görülmektedir.

### Modelin Genelleştirilmesi



Şekil-2: Bir Sunucu ve Bir Bekleme Yeri

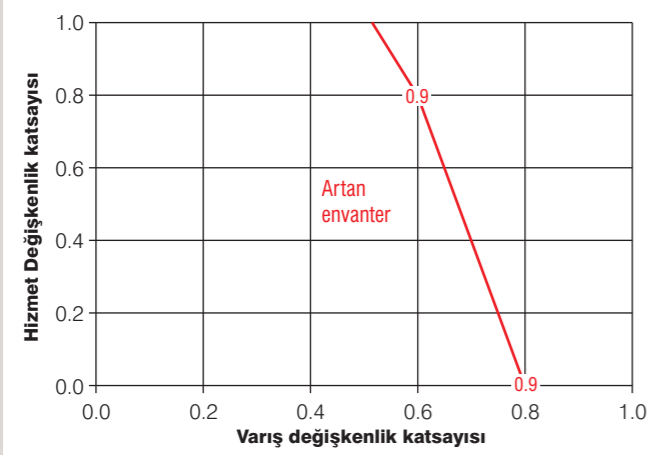


Şekil-3: Bir Sunucu ve Bir Bekleme Yeri

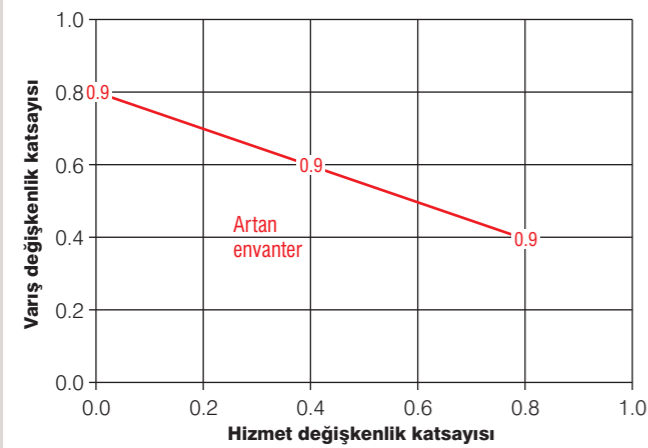
Yalın Altı Sigma iyileştirme projelerinde çalışan proje müdürleri ve ekip üyeleri, bu simülasyon modeli ile elde edilen sonuçları projeden beklenen sonuçları genelleştirmek için kullanabilirler.

Örneğin kabul edilebilir düzeyde engelleme olan bir sistemi iyileştirmeye çalışırken aşağıdakilerin gerçekleşmesini bekleyebilirsiniz:

1. Ortalama varış hızı arttıkça ortalama akış hızı, akış süresi, envanter ve işçi başına kullanım değerleri artar.
2. Konumlar arasında varış süresi değişkenliği arttıkça ortalama akış süresi ve envanter artar. Ortalama akış



Şekil-4: Bir Sunucu ve İki Bekleme Yeri



Şekil-5: Bir Sunucu ve İki Bekleme Yeri

hızı ve işçi başına kullanım değerleri sabit kalır.

- İşçi sayısı veya işçi başına ortalama hız arttıkça ortalama akış süresi, envanter ve işçi başına kullanım değerleri azalır. Akış hızı sabit kalır.
- İşçi başına hız değişkenliği arttıkça ortalama akış süresi ve envanter artar. Ortalama akış hızı ve işçi başına kullanım değerleri değişmez.

Gerçek sistemlerin çoğunda (örneğin çağrı merkezleri) engelleme vardır. Ancak, bunun nedeni büyük oranda işçi eklemenin gerektirdiği masraflardır. Engelleme olan sistemlerde aşağıdaki kilit alanlardaki sonuçlar farklı olacaktır:

- Konumlar arasında varış sürelerindeki değişkenlik arttıkça ortalama akış süresi de artar ve ortalama akış hızı ve işçi başına kullanım değerleri azalır.
- Ortalama envanter üzerindeki etki bilinemez ve bu ortalama akış süresi kaynaklı göreceli envanter artışına ve ortalama akış hızı kaynaklı göreceli envanter azalmasına bağlıdır.
- Konumlar arasında varış sürelerindeki değişkenlik arttığı zaman dikkat edilmesi gereken, bu artışa nasıl tepki verileceğidir. Proje müdürü akış süresini azaltmaya odaklanmak istiyorsa, yoğun çalışma saatlerine işçi eklemek uygun olacaktır. Proje müdürü bekleme yeri sayısını minimuma indirmek istiyorsa (bu örnekte telefon hattı sayısı), gereken bekleme yeri sayısını belirlemek için sistemin simülasyonu yapılmalıdır.

İşçi sayısı veya işçi başına ortalama hız arttığında:

- Ortalama akış süresi, envanter ve işçi başına kullanım değerleri artar.
- Ortalama akış hızı artar.

Temsilci başına hızdaki değişkenlik arttığında:

- Ortalama akış süresi artar.
- Ortalama akış süresi ve temsilci başına kullanım değeri azalır.
- Ortalama envanter üzerindeki etki bilinemez ve ortalama akış süresi kaynaklı göreceli envanter artışına ve ortalama akış hızı kaynaklı göreceli envanter azalmasına bağlıdır.
- Proje müdürü akış süresini azalmaya odaklanmak istiyorsa, işçilere eğitim vermek uygun olacaktır. Çağrı merkezlerinde gördüğümüz göreceli olarak yüksek ciro düşünülürse, bu tür eğitimlerin script ve akış çizelgeleri gibi basit araçlar üzerine odaklanması önerilir. Ayrıca çağrı merkezleri, karmaşık durumları hızlı bir şekilde kolaylaştırmak ve daha yüksek

eğitilmiş personele aktarmak için müşteri hizmet temsilcileri eğitmelidir.

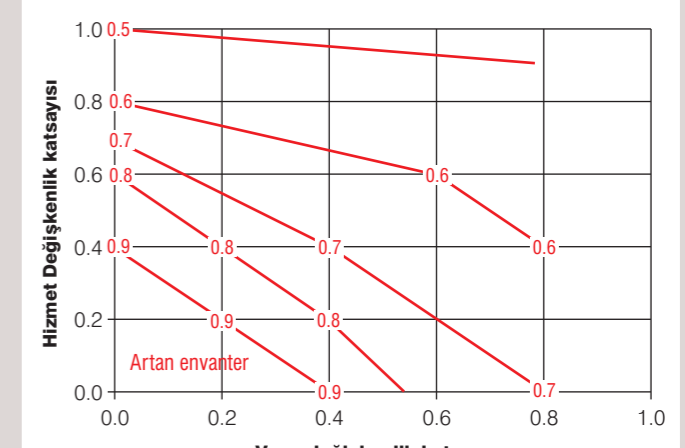
Bekleme yeri sayısı arttıkça:

- Ortalama akış hızı, akış süresi ve envanter artar.
- Bu da kayıp çağrı ve meşgul hizmet temsilcisi sayısını azaltır.

Sisteme girmiş durumda olan, ancak herhangi bir müşteri hizmet temsilcisine ulaşmamışken telefonu kapatan müşteriler olabileceği ve bu durumun bu makalede ele alınmamış olduğu unutulmamalıdır.



Şekil-6: İki Sunucu ve Bir Bekleme Yeri



Şekil-7: İki Sunucu ve Bir Bekleme Yeri

## Referanslar ve Notlar

- John D.C. Little, "A Proof for the Queuing Formula:  $L = \bar{e}W$ ," Operations Research, Vol. 9, No. 3, pp. 383-387.
- Robert Gerst, "The Little Known Law," Six Sigma Forum Magazine, Vol. 3, No. 2, pp. 18-23.
- Ravi Anupindi, Sunil Chopra, Sudhakar D. Desmukh, Jan A. Van Mieghem and Eitan Zemel, Managing Business Process Flows, second edition, Pearson Prentice Hall, 2006, pp. 202-232.
- J.B. Atkinson, "Some Related Paradoxes of Queuing Theory: New Cases and a Unifying Explanation," Journal of the Operational Research Society, Vol. 51, No. 8, pp. 921-935.
- ProModel is a discrete event simulation software: www.promodel.com/products/promodel.
- Charles Harrell, Biman K. Ghosh and Royce Bowden, Simulation Using ProModel, third edition, McGraw Hill, 2000, pp. 243-249.